# 1. Applications multilinéaires

## Proposition 1.4

Soit $f$ une application $n$-linéaire

$f$ est alternée $\Leftrightarrow$ $f$ est antisymétrique

($\Rightarrow$) $f : E \times \dots \times E \longrightarrow F$ Soit $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in E \times \dots \times E$

on a : $0 = f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$

$= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$

$+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)$

$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$ car $f$ est alternée

$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$ car $f$ est alternée

Donc $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$

$\Rightarrow f$ est antisymétrique

($\Leftarrow$) $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ ($f$ est anti)

$\Rightarrow 2 f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$

$\Rightarrow f$ est alternée.

Scanné avec CamScanner

**Proposition 2.4**

$\forall \varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, $\exists!(\varphi_s, \varphi_a) \in S_2(E) \times A_2(E)$ tq : $\varphi = \varphi_a + \varphi_s$.

- Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$ : on a : $\varphi = \varphi_s + \varphi_a$.
  où $\varphi_s$ et $\varphi_a$ sont les formes bilinéaires symétrique et antisymétrique définies dans La remarque 2.3.
- Reste à montrer l'unicité de la décomposition
  Soit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ une autre décomposition avec $\begin{cases} \varphi_1 \in S_2(E) \\ \varphi_2 \in A_2(A) \end{cases}$

Pour tout $x, y \in E$ on a :

$\varphi(x,y) + \varphi(y,x) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(y,x) + \varphi_2(y,x)$

$= 2\varphi_1(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_1(x,y) = \dfrac{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}{2} = \varphi_s(x,y)$

de même $\varphi(x,y) - \varphi(y,x) = 2\varphi_2(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_2(x,y) = \varphi_a(x,y)$

$\Rightarrow \varphi_2 = \varphi_a$

d'où l'unicité de la décomposition. ▨

Scanné avec CamScanner

## Exemple 2.10

$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

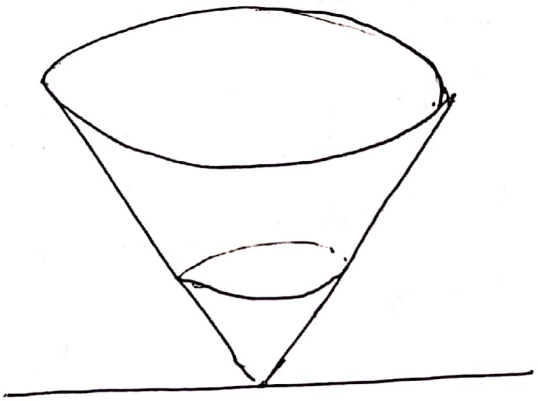
$(X, Y) \longmapsto \phi(X, Y) = xx' + yy' - zz'$

où $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$

- $\phi$ est bilinéaire symétrique.
- $X = (x, y, z) \in Co(\phi) \iff \phi(X, X) = 0$

$\iff x^2 + y^2 = z^2$ : c'est l'équation d'un

Cône algébrique dans $\mathbb{R}^3$.



(Ceci explique le vocabulaire : cône isotrope)

- $u(0,1,1) \in Co(\phi)$

  $v(1,0,1) \in Co(\phi)$

  Mais $u + v = (1,1,2) \notin Co(\phi)$

Donc $Co(\phi)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Scanné avec CamScanner

**Exemple 2.15**

$\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(X, Y) \longmapsto xx' - yy'$ où $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$

* $\phi$ est une f.b.s symétrique.
* $\phi$ est non dégénérée ??

Soit $X_1 = (x, y)$ fixée : $\forall Y = (x', y') : \phi(X, Y) = 0$

c-à-d $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad xx' - yy' = 0$

Pour $(x', y') = (1, 0)$ et $= (0, 1)$ on obtient :

$x = 0$ et $y = 0$ c-à-d $X = 0$

Donc $\phi$ est non dégénérée.

* on considère $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; x = y \}$

. $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

. Soit $u = (x, x)$ et $v(x', x') \in F$

$\phi(u, v) = xx' - xx' = 0$

Donc $\phi_F$ n'est pas non dégénérée
($\phi$ est dégénérée)

**Conclusion** La restriction d'une f.b.s non dégénérée à un sous espace vect n'est pas toujours non dégénérée.

Scanné avec CamScanner

## Théorème 2.19

Une f.b.s ~~non dégénérée~~ sur un espace vectoriel $E$. $\dim E = n$

Alors, il existe une base $B$ de $E$ formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux pour $\Phi$.

---

Par récurrence sur $n = \dim E$.

- Pour $n=1$, rien à démontrer.
- Supposons le résultat vrai pour tout sp vectoriel de dimension $\leq n$

Soit $E$ un ev. $\dim E = n+1$. et $\Phi$ une f.b.s non dégénérée sur $E$.

— Si $\Phi = 0$, alors toute base de $E$ est $\Phi$-orthogonale.

- Si $\Phi \neq 0$, $\exists$ un vecteur non nul $u$ tque: $\Phi(u,u) \neq 0$.

En effet

$\Phi \neq 0 \Rightarrow \exists x, y \in E$ tque $\Phi(x,y) \neq 0$.

$\Phi(x+y, x+y) = \Phi(x,x) + 2\Phi(x,y) + \Phi(y,y)$

- Si $\Phi(x,x) \neq 0$ c'est terminé, on prend $u = x$.

(même chose si $\Phi(y,y) \neq 0$ on prend $u = y$)

Sinon $\Phi(x,x) = \Phi(y,y) = 0$

$\Rightarrow \Phi(x+y, x+y) = 2\Phi(x,y) \neq 0$.

on prend, donc $u = x+y$.

On considère, maintenant $F = \langle u \rangle^{\perp} = \{x \in E / \Phi(x,u) = 0\}$

$\Phi(u,u) \neq 0 \Rightarrow u \notin F$

donc $F$ est un sp vect de $\dim F \leq n$

on considère $\Phi_1 = \Phi/F$. c'est une f.b.s sur $F$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base de $F$

$B_F$ formé de vecteurs orthogonaux pour $\Phi_1$.



Scanné avec CamScanner

- Montrons que $E = F \oplus \langle u \rangle$
où $\langle u \rangle = \mathbb{R}u$ : sous espace engendré par $u$.

→ Soit $x \in E$, tq $x \notin F$

Donc $\phi(u,x) \neq 0$.

on cons. le vecteur $w = x - \frac{\phi(u,x)}{\phi(u,u)} u$ . (*)

on a: $\phi(u,w) = \phi(u,x) - \frac{\phi(u,x)}{\phi(u,u)} \phi(u,u) = 0$

$\Rightarrow w \in F$

et (*) $\Rightarrow$ $x = w + \frac{\phi(u,x)}{\phi(u,u)} u \in F + \langle u \rangle$

→ Reste à montrer que $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$

En effet $x \in F \cap \langle u \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x \in F \\ x \in \langle u \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(u,x) = 0 \\ x = \alpha u \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \alpha \phi(u,u) = 0$ car $\phi(u,u) \neq 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Donc $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$

Donc $\boxed{E = F \oplus \langle u \rangle}$

Donc $\dim F = n$ et la base adaptée $B = B_F \cup \{u\}$

est une base de $E$ $\phi$-orthogonale.

▨



Scanné avec CamScanner

**Définition 3.1**

$\phi$ une f. bilinéaire sur $E$.

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de $E$.

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ , $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$

la matrice de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}$ est $M = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

$$\phi(u,v) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, \phi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \right)$$

D'autre part :

$$MY = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^tX MY = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right.$$

D'où $\boxed{\phi(u,v) = {}^tXMY}$

Scanné avec CamScanner

## Exemple 3.2

$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ Pour $u = (x, y, z)$ ; $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$f(u,v) = 2xx' + 7yy' + 3xy' - xz' + 3yx' - 8x'$

- f est une forme bilinéaire.
- La matrice de f par rapport à la base canonique

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & f(e_1,e_3) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) & f(e_2,e_3) \\ f(e_3,e_1) & f(e_3,e_2) & f(e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(f(e_1,e_1) = f((1,0,0),(1,0,0)) = 2 \dots)$

- M est une matrice symétrique $\Rightarrow$ f est une f.b.s.



Scanné avec CamScanner